

Summation über sämtliche $l \neq j$ und Einsetzen von (69) in (70) liefert

$$\sum_{l \neq j} W_{lj}^1 = \sum_{l \neq j} |H_{lj}|^2 \frac{4}{\hbar} \frac{(\sum W_{lj}^1) \hbar}{(\sum W_{lj}^1)^2 + 4(E_j - E_l)^2} \quad (71)$$

und damit eine Gleichung für (65).

Gelingt es aus (71) den Wert von (65) auszurechnen, so sind die Übergangswahrscheinlichkeiten (70) aus den Übergangsmatrizen wohldefiniert anzugeben.

Die Antwort hängt von der Gestalt von (71) ab, und kann nicht allgemein angeschrieben werden.

Wir betrachten einen Spezialfall

$$E_l \approx E_j \quad l = 1, 2, \dots \quad (72)$$

Dann geht (71) über in

$$\sum_{l \neq j} W_{lj}^1 = \sum_{l \neq j} |H_{lj}|^2 \frac{4}{\hbar} \left(\sum_{l \neq j} W_{lj}^1 \hbar \right)^{-1} \quad (73)$$

und daraus erhält man (74):

$$\sum_{l \neq j} W_{lj}^1 = \frac{2}{\hbar} \left(\sum_{l \neq j} |H_{lj}|^2 \right)^{1/2}. \quad (74)$$

Das kann man dann in (70) an Stelle von $-W_{jj}^1$ einsetzen. Bei nur einem einzigen Übergang wird daraus

$$W_{lj}^1 = \frac{2}{\hbar} |H_{lj}|. \quad (75)$$

Wieweit dieser Fall Bedeutung hat, kann nur durch eine genauere Diskussion der Gl. (72) ersichtlich werden, indem man untersuchen muß, wann in bezug auf das vorgegebene Problem das Ungefähr-Gleich-Zeichen anwendbar ist.

Herrn Prof. Dr. E. FUES danke ich für Diskussionen und konstruktive und wohlwollende Kritik sehr herzlich. Ebenso danke ich Herrn M. WAGNER für eine kritische Durchsicht des Manuskripts und die Ableitung der Formeln (66) – (69), die in dieser Fassung unklar waren.

Dispersionsbeziehungen für die Streuung von π -Mesonen an Deuteronen

Von F. KASCHLUHN

Aus dem Vereinigten Institut für Kernforschung Dubna bei Moskau (UdSSR)
Institut für Theoretische Physik

(Z. Naturforsch. 13 a, 183–194 [1958]; eingegangen am 21. November 1957)

Es werden Dispersionsbeziehungen für die elastische Vorwärtsstreuung von geladenen und ungeladenen π -Mesonen an Deuteronen unter Vernachlässigung der elektromagnetischen Wechselwirkung abgeleitet. Es ergeben sich folgende Unterschiede im Vergleich zum Problem der Streuung von π -Mesonen an freien Nukleonen: 1. Die Streuamplitude ist von vornherein symmetrisch in den Isotopenspinindizes des π -Mesons und man erhält identische Dispersionsbeziehungen für die Streuung positiver, negativer und neutraler π -Mesonen. 2. Der gesamte unbeobachtbare Bereich liefert einen kontinuierlichen Beitrag, wobei keine Polbeiträge auftreten. 3. Die Strom-Matrixelemente bezüglich des Deuteron-Systemes divergieren fast im ganzen nichtbeobachtbaren Bereich, so daß eine explizite Durchführung der analytischen Fortsetzung nötig ist, wozu die Methode von Bogoljubow verwandt wird. 4. Es treten bestimmte Polarisierungseffekte bezüglich des Spins des Deuterons auf. Über die Gestalt der Strom-Matrixelemente lassen sich in dem benötigten nichtrelativistischen Bereich der Nukleonenbewegung plausible Annahmen machen, und die Rechnungen werden im einzelnen so weit durchgeführt, daß sie unmittelbar für einen Vergleich mit den experimentellen Daten in Frage kommen.

Bei der Aufstellung von Dispersionsbeziehungen für das experimentell relativ gut untersuchte Problem der Streuung von π -Mesonen an Deuteronen stößt man auf die Schwierigkeit, daß es momentan im Rahmen der Quantenfeldtheorie noch keine genügend ausgearbeitete Theorie der gebundenen Zustände gibt, die eine befriedigende Berechnung der vollständigen Strom-Matrixelemente (Vertexteile mit

Einschluß sämtlicher Strahlungskorrekturen) zwischen Zuständen gestattet, unter denen auch gebundene sind. So brauchen wir in unserem Falle bei der Berechnung des Beitrags des nichtbeobachtbaren Gebiets das vollständige Strom-Matrixelement zwischen dem Deuteron-Grundzustand und dem Zustand zweier nicht gebundener Nukleonen. Andererseits kann man aber die Dispersionsbeziehungen benutzen, um be-



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

stimmte, physikalisch plausible Annahmen über solche Strom-Matrixelemente (die im übrigen nur im nichtrelativistischen Bereich benötigt werden) experimentell auf eine ganz neue Art zu prüfen, und so Aufschluß über den Teil der Feldwechselwirkung erhalten, der für die Streuung von Elementarteilchen (π -Mesonen) an gebundenen Systemen (Deuteronen) verantwortlich ist, wobei insbesondere der gebundene Zustand über das Feld der zu streuenden Teilchen zustande kommt. Dieser Standpunkt soll der vorliegenden Arbeit zugrunde gelegt werden, die sich im übrigen eng an die Arbeit von BOGOLJUBOW, MEDWEDEW und POLIWANOW¹ über Probleme der Theorie der Dispersionsbeziehungen anschließt.

Im einzelnen werden Dispersionsbeziehungen für die elastische Vorwärtsstreuung von geladenen und ungeladenen π -Mesonen an Deuteronen aufgestellt, wobei elektromagnetische Effekte (COULOMB-Wechselwirkung, Massenunterschiede der verschieden geladenen Teilchen usw.) vernachlässigt werden. Im Abschnitt 1 werden einige Fragen besprochen, die mit dem Ansatz des Wechselwirkungsterms und der Kausalitätsbedingung zusammenhängen. In Abschnitt 2 werden die Verhältnisse im Isotopenspin-Raum untersucht, wobei sich zeigt, daß die Streuamplitude von vornherein symmetrisch in den Isotopenspinindizes des π -Mesons ist, so daß sich identische Dispersionsbeziehungen für die Streuung positiver, negativer und neutraler π -Mesonen an Deuteronen ergeben. Im Abschnitt 3 werden die Zusammenhänge im nichtbeobachtbaren Bereich untersucht, wobei sich herausstellt, daß die Strom-Matrixelemente fast in diesem ganzen Gebiet divergieren, so daß eine explizite Durchführung der analytischen Fortsetzung nötig ist, wozu die Methode von BOGOLJUBOW verwandt wird. Im Unterschied zum Fall der Streuung von π -Mesonen an freien Nukleonen liefert der gesamte nichtbeobachtbare Bereich einen kontinuierlichen Beitrag, wobei keine Polbeiträge auftreten. Es sei bemerkt, daß für diesen Fall noch kein Beweis für die Möglichkeit der analytischen Fortsetzung und damit für die Existenz der Dispersionsbeziehungen gelungen ist. Weiterhin ergeben sich bestimmte Polarisierungseffekte bezüglich des Spins des Deuterons. Im Abschnitt 4 schließlich werden die Dispersionsbezie-

hungen aufgestellt, und der Beitrag des nichtbeobachtbaren Bereichs, für den sich als Resultat der analytischen Fortsetzung zunächst ein geschlossener Integralausdruck ergibt, durch einen analytischen Ausdruck angegeben, der genauer als 10% ist und genügen sollte. Ferner wird ein einfacher, direkt verwendbarer Näherungsausdruck angegeben, dessen Genauigkeit 30% beträgt. Bei dieser expliziten Auswertung wird vorausgesetzt, daß die Wellenfunktion des Deuterongrundzustandes durch die von CHEW² benutzte HULTHÉN-Funktion approximiert werden kann, was wir aber im Hinblick auf die experimentellen Meßmöglichkeiten als ausreichend ansehen dürfen. In der endgültigen Form sind dann die Dispersionsbeziehungen unmittelbar für einen Vergleich mit den experimentellen Daten geeignet.

Es sei abschließend erwähnt, daß das vorliegende Problem bereits im vergangenen Jahr von IOFFE, POMERANTSCHUK und RUDIK³ in einer kurzen Arbeit behandelt worden ist, die aber noch in vieler Hinsicht unzureichend ist (so vor allem in der Behandlung des nichtbeobachtbaren Bereichs).

1. Der Wechselwirkungsterm und die Kausalitätsbedingung

Der einfachste Weg der Beschreibung des vorliegenden Streuproblems ist der, der die innere Struktur des Deuterons ganz vernachlässigt, so daß dieses durch einen üblichen Feldoperator dargestellt werden kann (mit den entsprechenden Transformationseigenschaften), der mit dem π -Mesonfeld in lokaler Wechselwirkung steht (vgl. HAAG⁴). Es sollte dann möglich sein, Dispersionsbeziehungen für dieses Problem unmittelbar im konventionellen Formalismus oder in dem allgemeinen Schema von BOGOLJUBOW, MEDWEDEW und POLIWANOW¹ aufzustellen. Ein solches Vorgehen hat aber prinzipiell zwei Nachteile: erstens würde der Zusammenhang zwischen der auf diesem Wege bestimmten Kopplungskonstanten und derjenigen der pseudoskalaren π -Meson-Nukleon-Theorie unklar sein, und zweitens erscheint auch die explizite Verwendung der Kausalitätsbedingung nicht sehr sinnvoll, da nicht das Deuteron mit seinem

¹ N. N. BOGOLJUBOW, B. W. MEDWEDEW u. M. K. POLIWANOW, Probleme der Theorie der Dispersionsbeziehungen, Verlag Gostechisdat, Moskau (im Erscheinen); gekürzte Übersetzung ins Deutsche in Fortschr. Phys., Akademie-Verlag Berlin (im Erscheinen). Hier weitere Literaturangaben.

² G. F. CHEW, Phys. Rev. **84**, 710 [1951].

³ B. L. IOFFE, I. J. POMERANTSCHUK u. A. P. RUDIK, Exp. Theor. Phys., USSR **4**, 712 [1956].

⁴ R. HAAG, Dan. Mat. Fys. Medd. **29**, Nr. 12 [1955].

Schwerpunkt lokal mit dem π -Mesonenfeld in Wechselwirkung steht, sondern bestenfalls sein individuelles Proton und Neutron, die aber räumlich voneinander getrennt sind.

Physikalisch aufschlußreicher ist zweifellos der Weg, der die innere Struktur des Deuterons in Rechnung zieht, dieses also wirklich als gebundenen Zustand behandelt. In dieser Arbeit gehen wir wie folgt vor: Zunächst können wir wörtlich das allgemeine Schema von BOGOLJUBOW, MEDWEDEW und POLIWANOW¹ übernehmen, da dieses – wenigstens prinzipiell – das Vorhandensein gebundener Zustände berücksichtigt. Wir beschreiben also das Nukleonenfeld wie üblich durch den Spinor $\psi(x)$ und das π -Mesonenfeld durch das pseudoskalare Feld $\varphi_\sigma(x)$, deren Wechselwirkung miteinander als lokal vorausgesetzt wird. Die wesentliche Größe der Theorie, der „BOSE-Strom“, wird dann aus der S-Matrix gewonnen gemäß

$$j_\sigma(x) = i \frac{\delta S}{\delta \varphi_\sigma(x)} S^+, \quad (1)$$

und die Kausalitätsbedingung hat die Form

$$\frac{\delta}{\delta \varphi_\sigma(y)} \left[\frac{\delta S}{\delta \varphi_\sigma(x)} S^+ \right] = 0 \quad \text{für } x \lesssim y \quad (2)$$

[$x \lesssim y$ bedeutet x zeitlich vor y oder $(x - y)$ raumartig]. Die eigentliche Schwierigkeit bei der Aufstellung von Dispersionsbeziehungen für das π -d-Problem entsteht nun bei der Berechnung des Beitrags des nichtbeobachtbaren Gebiets, wo wir nämlich das vollständige Strom-Matrixelement zwischen Zwei-Nukleonen-Zuständen benötigen, von denen der eine ein gebundener Zustand, der Deuteron-Grundzustand, und der andere ein nicht gebundener Zustand ist (zweier Protonen, zweier Neutronen oder von Proton und Neutron). Da es im Moment keine generelle Theorie der gebundenen Zustände gibt, die solche Matrixelemente explizit auszuwerten gestattet, müssen wir hier ein geeignetes Näherungsverfahren verwenden⁵.

Zunächst beachten wir, daß wir die Strom-Matrixelemente zwischen den Zwei-Nukleonen-Zuständen nur für den nichtrelativistischen Bereich benötigen werden. Hier ist es möglich – wenn wir zunächst von der Existenz reeller π -Mesonen absehen –, die Bewegung der beiden Nukleonen durch eine SCHRÖDINGER-Gleichung zu beschreiben, in die als Wechsel-

wirkung das (spin-abhängige) Zwei-Teilchen-Potential eingeht. Dieses Potential hängt mit der Existenz virtueller π -Mesonen zusammen und kann aber auch rein phänomenologisch angesetzt werden. Wir schreiben den Zwei-Teilchen-HAMILTON-Operator der Nukleonen

$$H_N = H_k + V(1, 2) \quad (3)$$

mit H_k als kinetischer und $V(1, 2)$ als potentieller Energie. Die Wellenfunktionen Ψ von (3) gehören allgemein zum kontinuierlichen Spektrum, außer im Falle des Triplett-Spin- und Singulett-Isotopenspin-Zustands mit dem Deuteron-Grundzustand. Die Wechselwirkung der beiden Nukleonen mit reellen π -Mesonen, die deren Erzeugung und Vernichtung beschreiben muß, berücksichtigen wir durch das pseudoskalare Wechselwirkungsglied (wiederum bei nicht-relativistischer Bewegung der Nukleonen, wobei für unsere Zwecke die Mesonenpaar-Terme unterdrückt werden können)

$$H_W = \sum_{i=1}^2 \frac{g}{2M} \sum_{\sigma=1}^3 \tau_\sigma^i \sigma_i \text{grad } \Phi_\sigma(x_i), \quad (4)$$

wo g die Kopplungskonstante und M die Nukleonenmasse ist und σ_i , τ_σ^i und x_i Spin-, Isotopenspin-Matrizen und Ortsvektoren der beiden Nukleonen sind. Da wir den Einfluß des π -Mesonenfeldes auf die Nukleonen schon so weit berücksichtigt haben, wie er zum Wechselwirkungspotential $V(1, 2)$ in (3) führt, haben wir offenbar folgende Renormierungsvorschrift einzuführen: Da die Wechselwirkung (4) keinen beobachtbaren Einfluß auf die Zustandsfunktionen Ψ von (3) haben darf, sind sämtliche Strahlungskorrekturen bezüglich dieser „abzurenormieren“⁶. Insbesondere bedeutet dies, daß bei Bildung der (4) entsprechenden vollständigen Strom-Matrixelemente (Vertexteile mit Einschluß aller Strahlungskorrekturen) sämtliche höhere Näherungen lediglich zur Ersetzung der nichtrenormierten Kopplungskonstanten durch die renormierte, experimentelle führen. Im übrigen können wir bei dieser (im einzelnen natürlich unbegründeten) Theorie gebundener Zustände bezüglich der Wechselwirkung (4) die Adiabaten-Hypothese des Ein- und Ausschaltens der Wechselwirkung in der fernen Vergangenheit und fernen Zukunft wie üblich verwenden, weil nun

⁵ Beim π -p- oder π -n-Problem, wo man auf die Strom-Matrixelemente zwischen Ein-Nukleonen-Zuständen stößt, kann man diese bekanntlich unter Zuhilfenahme der DIRAC-Gleichung mittels allgemeiner Invarianzüberlegungen auswerten.

⁶ Also nicht wie sonst bezüglich der Zustände freier Elementarteilchen.

die gebundenen Zustände nicht zerfallen. Die Zustände Ψ von (3) sind dann die asymptotischen Zwei-Nukleonen-Zustände. Die Frage ist lediglich die, ob (4) die Wechselwirkung der im Zustand Ψ befindlichen Nukleonen mit reellen π -Mesonen (unter Beachtung der modifizierten Renormierungsvorschrift) richtig beschreibt. Aber das kann ja – wie gesagt – über die Dispersionsbeziehungen geprüft werden.

Von besonderer praktischer Wichtigkeit ist nun die Tatsache, daß wir bei der Berechnung des Beitrags des nichtbeobachtbaren Bereichs in den Dispersionsbeziehungen die dem kontinuierlichen Spektrum entsprechenden Lösungen von (3), deren analytische Behandlung große Schwierigkeiten bereiten würde, exakt durch ebene Wellen ersetzen können (s. Abschnitt 3), d. h. durch Lösungen von H_k , wobei wir wie üblich in der (nichtquantisierten) Streutheorie die Übereinstimmung der Eigenwertspektren von H_N und H_k im kontinuierlichen Bereich voraussetzen⁷.

Zur Kausalitätsbedingung (2) bemerken wir noch folgendes: Die Bedingung (2) bedeutet bezüglich der Wechselwirkung (4), wobei bei nichtrelativistischer Behandlung der Nukleonenbewegung offenbar nur das Zeichen $x < y$, also x zeitlich vor y , Sinn hat, in unserem Falle nicht, daß wir insgesamt die Wechselwirkung zwischen dem π -Mesonfeld und den beiden Nukleonen als lokal ansehen, sondern nur zwischen dem einzelnen, individuellen Nukleon und dem π -Mesonfeld. Die gesamte Wechselwirkung (4) ist „nichtlokal“ in dem Sinne, daß das π -Mesonfeld auf zwei räumlich getrennte Punkte (Nukleonen im gebundenen oder nicht gebundenen Zustand) lokal einwirkt⁸.

2. Die Verhältnisse im Isotopenspin-Raum

Wir interessieren uns für die Struktur der Streumatrix bezüglich des Isotopenspins des π -Mesons für die drei elastischen Prozesse

$$\begin{aligned}\pi^+ + d &\rightarrow \pi^+ + d, \\ \pi^0 + d &\rightarrow \pi^0 + d, \\ \pi^- + d &\rightarrow \pi^- + d,\end{aligned}\quad (5)$$

⁷ Vgl. S. S. SCHWEBER, H. A. BETHE u. F. DE HOFFMANN, Mesons and Fields, Row, Peterson and Company, Evanston 1955, Vol. I, S. 197.

⁸ An dieser Stelle erkennen wir übrigens zwei Vorzüge der Kausalitätsbedingung in der von BOGOLJUBOW und SCHIRKOW vorgeschlagenen Form (2) gegenüber der sonst verwandten in der Form $[j_\rho(x), j_\rho(y)] = 0$ für $x \sim y$, d. h. $(x-y)^2 < 0$: erstens hat (2) noch direkten Sinn im nichtrelativistischen Bereich der Nukleonenbewegung mit $x < y$ an Stelle

deren Streuamplituden wir mit T^+ , T^0 und T^- bezeichnen. Es ist zu erwarten, daß bei der hier vorgenommenen Vernachlässigung der elektromagnetischen Effekte die Streuamplituden für alle drei Prozesse gleich, d. h. ladungsunabhängig, sind, wenn wir Invarianz gegenüber Drehungen im Isotopenspin-Raum fordern.

Dazu betrachten wir die allgemeine Form der retardierten Matrix T^{ret} , die im beobachtbaren Bereich wesentlich die Streumatrix darstellt. Für diese gilt offenbar bezüglich des Isotopenspins des π -Mesons

$$T_{\varrho', \varrho}^{\text{ret}} = A \delta_{\varrho' \varrho} + \omega_{\varrho' \varrho} (\tau_1 B + \tau_2 C) + [D(\omega \tau_1)(\omega \tau_2) + E(\omega \tau_2)(\omega \tau_1)]_{\varrho' \varrho}, \quad (6)$$

wenn mit ϱ, ϱ' die Isotopenspinindizes des π -Mesons bezeichnet werden und ω, τ_1 und τ_2 die Isotopenspin-Vektoren des π -Mesons und der beiden Nukleonen sind. A, B, C, D und E sind skalare Amplituden⁹.

Bei der elastischen Streuung (5) verschwindet das zweite Glied in (6), während das dritte unter Beachtung von $\omega^2 = 2 \delta_{\varrho' \varrho}$ nur einen Beitrag proportional $\delta_{\varrho' \varrho}$ gibt; denn für den Singulett-Isotopenspin-Zustand des Deuterons gilt¹⁰ (der Gesamtisotopenspin-Zustandsvektor ist hier einfach das Produkt der Isotopenspin-Zustandsvektoren von π -Meson und Deuteron)

$$\langle X_{0,0} | \tau_i^2 | X_{0,0} \rangle = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (7)$$

und

$$\langle X_{0,0} | \tau_1^2 \tau_2^2 | X_{0,0} \rangle = \langle X_{0,0} | \tau_2^2 \tau_1^2 | X_{0,0} \rangle = -\delta_{\alpha\beta} \quad (8)$$

[vgl. auch (24) und (25)]. Damit ist die Amplitude (6) bezüglich der Prozesse (5) symmetrisch in den Isotopenspin-Indizes ϱ und ϱ' , was bedeutet, daß bei Aufstellung der Dispersionsbeziehungen keine weitere Symmetrisierung nötig ist. Es ist nun auch klar, daß die Streuamplitude von der Ladung des π -Mesons unabhängig ist und bei entsprechender Normierung gilt für (6)

$$T_{\varrho', \varrho} = T \delta_{\varrho' \varrho} \quad (9)$$

mit $T = T^+ = T^0 = T^- = A - 2(D + E)$. (10)

$x \lesssim y$, und zweitens ist (2) auch dann verwendbar, wenn wir das Nukleonenfeld nicht ein zweites Mal quantisieren, sondern die Konfigurationsraum-Methode benutzen.

⁹ Auf Grund der Invarianz der Streumatrix gegenüber Vertauschung der beiden Nukleonen muß $P_{12} C = B$ und $P_{12} E = D$ sein (P_{12} Vertauschungsoperator).

¹⁰ Vgl. H. A. BETHE u. F. DE HOFFMANN, Mesons and Fields, Row, Peterson and Company, Evanston 1955, Vol. II, S. 39.

3. Der Beitrag des nichtbeobachtbaren Bereichs

Wir erinnern zunächst — weil dies für das Weitere sehr wichtig ist —, daß die wesentliche Größe der Theorie, auf die sich alle andern für uns nötigen Größen zurückführen lassen, die folgende ist¹:

$$F_{\alpha\omega}^{(-)}(x-y) = i \exp \left\{ -i \frac{p'-p}{2} (x+y) \right\} \cdot \langle p', m' | j_{\varrho'}(x) j_{\varrho}(y) | p, m \rangle. \quad (11)$$

Hier sind $j_{\varrho'}(x)$, $j_{\varrho}(y)$ die „BOSE-Ströme“ (1) und $|p, m\rangle$ bzw. $\langle p', m'|$ die asymptotischen Zu-

stände des Systems mit definiertem Gesamtimpuls p bzw. p' , wobei alle übrigen Quantenzahlen, die außer p und p' zur vollständigen Charakterisierung eines Zustandes nötig sind, durch m bzw. m' bezeichnet werden. Ferner wird durch α der Satz von Indizes ϱ, p, m und durch ω der von ϱ', p', m' abgekürzt. Unter der Benutzung der Vollständigkeit des Systems der Funktionen $|p, m\rangle$ wird dann in der weiteren Herleitung das Matricelement in (11) umgeformt gemäß

$$\langle p', m' | j_{\varrho'}(x) j_{\varrho}(y) | p, m \rangle = \sum_n \int d^3f \langle p', m' | j_{\varrho'}(x) | k, n \rangle \langle k, n | j_{\varrho}(y) | p, m \rangle. \quad (12)$$

Mittels (11) und der Entwicklung (12) läßt sich dann der antihermitesche Teil der retardierten Matrix $T_{\alpha\omega}^{\text{ret}}$ im Falle der elastischen Vorwärtstreuung von π -Mesonen an Deuteronen in folgender Form schreiben (analog dem Vorgehen beim π -Meson-Nukleon-Problem)

$$A_{\alpha\omega}(E, q) = \pi \left\{ \sum_n \langle 0, s | j_{\varrho'}(0) | q, n \rangle \langle q, n | j_{\varrho}(0) | 0, s \rangle \delta(E - \sqrt{M_n^2 + q^2} + M_D) - \sum_n \langle 0, s | j_{\varrho}(0) | -q, n \rangle \langle -q, n | j_{\varrho'}(0) | 0, s \rangle \delta(E + \sqrt{M_n^2 + q^2} - M_D) \right\}. \quad (13)$$

Die Untersuchungen erfolgen im Laboratoriumssystem, wo also der Impuls des Deuterons $p=0$ ist, dessen Zustandsvektor wir dann $|0, s\rangle$ mit s als Spin-Quantenzahl schreiben. E und q stellen Energie und Impuls des einfallenden π -Mesons der Masse m dar

$$E = \sqrt{m^2 + q^2}, \quad |q| = \sqrt{E^2 - m^2}, \quad (14)$$

M_D ist die Masse des Deuterons

$$M_D = 2M - \varepsilon, \quad (15)$$

wo M die Nukleonenmasse und ε die Bindungsenergie ist, und M_n ist schließlich die Masse der Zwischenzustände, deren Impuls q bzw. $-q$ ist. Wir betrachten im folgenden alle positiven E -Werte, wie sie in die Dispersionsbeziehungen des Abschnitts 4 eingehen.

Die Auswertung des Ausdrucks (13) erfolgt unter der Annahme, daß das System Deuteron + π -Meson keinen gebundenen Zustand (außer dem Deuteron-

Grundzustand) hat, dessen Masse kleiner als die Summe der Massen von Deuteron und π -Meson ist, also

$$M_n \geq M_D + m \quad (16)$$

[diese Voraussetzung (16) hat natürlich nur Sinn bei Vernachlässigung von schwacher und elektromagnetischer Wechselwirkung]. Im weiteren beachten wir, daß die in den Summen von (13) stehenden Zwischenzustände wegen der Erhaltung der mesischen Ladung mindestens zwei Nukleonen enthalten müssen (wir nehmen also an, daß sich die Zustandsvektoren des Vakuums und der Ein-Nukleonen-Zustände als auch die Zustände, die nur π -Mesonen enthalten, bei Eichtransformationen verschieden von denen der Zwei-Nukleonen-Zustände transformieren, unabhängig davon, ob gegebenenfalls Bindungszustände vorliegen oder nicht).

Somit beginnen die Summen in (13) mit Zwei-Nukleonen-Zwischenzuständen, die wir von den übrigen Gliedern abtrennen

$$A_{\alpha\omega}(E, q) = \pi \left\{ \sum_l |\langle q, l | j_{\varrho}(0) | 0, s \rangle|^2 \delta(E - \sqrt{M_l^2 + q^2} + M_D) - \sum_l |\langle -q, l | j_{\varrho}(0) | 0, s \rangle|^2 \delta(E + \sqrt{M_l^2 + q^2} - M_D) \right\} + f_{\alpha\omega}(E, q). \quad (17)$$

Zunächst haben wir hier Gebrauch gemacht von der Tatsache, daß gemäß Abschnitt 2 die Streuamplitude symmetrisch in q, q' ist, l bezeichnet außer dem Impuls $\pm q$ sämtliche Quantenzahlen, die zur vollständigen Charakterisierung der Zwei-Nukleonen-Zwischenzustände nötig sind. Mit $f_{\omega\omega}$ sind alle übrigen Glieder der Summe gemeint, deren Zwischenzustände mehr Teilchen als zwei Nukleonen enthalten und für deren Massen die Beziehung (16) gilt. Da die Argumente der in $f_{\omega\omega}$ steckenden δ -Funktionen für

$$E_{1,2} = \pm \frac{M_n^2 - M_p^2 - m^2}{2M_D} \quad (18)$$

verschwinden, was unter Berücksichtigung von (16) die Ungleichung

$$E_1 \geq m \quad (E_2 \leq -m)$$

ergibt, liefert $f_{\omega\omega}$ im nichtbeobachtbaren Bereich $0 < E < m$ keinen Beitrag.

Wir brauchen im folgenden also nur die Zwei-Nukleonen-Terme zu betrachten. Zunächst berechnen wir die entsprechenden Strom-Matrixelemente für die Streuung positiver und negativer π -Mesonen mit der Wechselwirkung

$$\frac{\sqrt{2}g}{2M} \tau_{\pm}^i \sigma_i \text{grad } \Phi^{\pm}(\mathbf{r}_i) \quad (19)$$

[vgl. (4)], wo nun

$$\tau_{\pm} = \frac{1}{2} (\tau_1 \pm i \tau_2), \quad \Phi^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_1 \mp i \Phi_2).$$

Es ist klar, daß auf Grund der Erhaltung der elektrischen Ladung als Zwischenzustand nur der zweier identischer Nukleonen, zweier Protonen oder Neutronen, auftreten kann. Da diese keinen gebundenen Zustand bilden, gehören ihre Eigenfunktionen zum kontinuierlichen Spektrum des HAMILTON-Operators (3).

Das allgemeine Strom-Matrixelement lautet

$$\langle q, l | j_{\pm}(x) | p, s \rangle = -i \frac{g\sqrt{2}}{2M} \left\{ \int d\mathbf{r}_2 \chi_z^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, t) Y_{s'} X_t' \tau_{\pm}^1 \sigma_1 q' \chi_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, t) Y_s X_t \right. \\ \left. + \int d\mathbf{r}_1 \chi_z^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}, t) Y_{s'} X_t' \tau_{\pm}^2 \sigma_2 q' \chi_D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}, t) Y_s X_t \right\}. \quad (20)$$

$$\text{Hier ist } q' = q - p \quad \text{und} \quad \chi_D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \exp(-i p \mathbf{r}_s) \psi_D(\mathbf{r}_r) \exp(i p_0 t), \quad p_0 = \sqrt{M^2 + p^2} \quad (21)$$

$$\text{und} \quad \chi_z(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \exp(-i q \mathbf{r}_s) \psi_z(\mathbf{r}_r) \exp(i q_0 t), \quad q_0 = \sqrt{M_z^2 + q^2} \quad (22)$$

die Wellenfunktion des Deuteron-Grundzustandes bzw. die zweier reeller Nukleonen mit Masse M_z des Zwischenzustandes bei abseparierter Schwerpunktsbewegung mit Schwerpunkts- und Relativkoordinate

$$\mathbf{r}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2), \quad \mathbf{r}_r = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

Weiterhin sind in (20) Y_s und X_t bzw. $Y_{s'}$ und $X_{t'}$ die Spin- und Isotopenspin-Funktionen des Zwei-Nukleonen-Systems. Insbesondere ist darauf zu achten, daß die Zustände antisymmetrisch in sämtlichen Koordinaten sein müssen. Den Raumanteil der Wellenfunktion des Zwischenzustandes symmetrisieren bzw. antisymmetrisieren wir gemäß

$$\psi_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_z'(\mathbf{r}_r) \pm \psi_z'(-\mathbf{r}_r) \}. \quad (23)$$

Bilden wir nun die Absolutquadrate von (20) für $x=0$ und $p=0$ und summieren wir diese über sämtliche Spin- und Isotopenspin-Zustände der möglichen Zwischenzustände — da der Deuteron-Grundzustand verschwindenden Isotopenspin hat, kommen als mögliche Zwischenzustände des Isotopenspins im

Einklang mit dem oben Gesagten nur in Frage

$$\tau_{\pm}^1 X_{0,0} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} X_{1,\pm 1}, \quad \tau_{\pm}^2 X_{0,0} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} X_{1,\pm 1} \quad (24)$$

—, so erhält man in Abhängigkeit von der Polarisationsrichtung des Deuterons

$$B^{\pm 1}(E, q, z) = \sum_{s,t} |\langle \pm q, l | j_{\pm}(0) | 0, \pm 1 \rangle|^2 \\ = \frac{2g^2}{M^2} q^2 \left| \int d^3\mathbf{r}_r \psi_{z,t}^* \sin \frac{q \mathbf{r}_r}{2} \psi_D \right|^2, \\ B^0(E, q, z) = \sum_{s,t} |\langle \pm q, l | j_{\pm}(0) | 0, 0 \rangle|^2 \quad (25) \\ = \frac{2g^2}{M^2} q^2 \left| \int d^3\mathbf{r}_r \psi_{z,s}^* \cos \frac{q \mathbf{r}_r}{2} \psi_D \right|^2.$$

Hier bezeichnet $\pm 1, 0$ die Projektion des Spins des Deuterons auf die Bewegungsrichtung (q) des einfallenden π -Mesons. In der oberen Beziehung muß ψ_z' die dem kontinuierlichen Spektrum von (3) entsprechende Lösung für den Triplett-Spinzustand sein, in der unteren die entsprechende für den Singulett-Spinzustand.

Analog verläuft die Rechnung beim Problem der Streuung von neutralen π -Mesonen an Deuteronen, wo nun direkt die Wechselwirkung in der Form (4) mit dem Glied $q=3$ eingeht. Zunächst ist hier außer dem Zustand zweier ungebundener Nukleonen (Proton und Neutron) noch als weiterer Zwischenzustand der Deuteron-Grundzustand mit dem Erhaltungssatz der elektrischen Ladung im Einklang. Aber dieser ist aus Gründen der besonderen Isotopenspin-Verhältnisse beim Deuteron nicht möglich: bei der Absorption des π^0 -Mesons im Deuteron ändert sich sein Isotopenspin um 1, so daß als mögliche Zwischenzustände nur solche mit Isotopenspin 1 in Frage kommen (die nicht gebunden sind). Im einzelnen gilt (wir schreiben Index 0 statt 3)

$$\tau_0^{1,2} X_{0,0} = \pm X_{1,0}, \quad (26)$$

und hieraus folgt auch insbesondere durch Vergleich mit (24), daß sich der Unterschied in den Faktoren ($\sqrt{2}$) der Wechselwirkungsterme (19) und (4) beim Berechnen der Matrixelemente gerade heraushebt und wir identische Streuamplituden für die Streuung geladener und ungeladener π -Mesonen erhalten. Das muß auch gemäß Abschnitt 4 so sein, wo die Ladungsunabhängigkeit der Streuamplitude beim π -Meson-Deuteron-Problem gezeigt wurde.

Wir können nun im einzelnen den Bereich des nichtbeobachtbaren Gebiets untersuchen, der zu den Dispersionsbeziehungen beiträgt. Gemäß (13) und den anschließenden Überlegungen gilt für

$$\begin{aligned} A^s(E, q) &= \pi \sum_z B^s(q, E, z) \{ \delta(E - \sqrt{M_z^2 + q^2} + M_D) - \delta(E + \sqrt{M_z^2 + q^2} - M_D) \} \\ &= \pi \sum_z B^s(q, E, z) \left| 1 - \frac{E_z}{M_D} \right| \{ \delta(E + E_z) - \delta(E - E_z) \}, \end{aligned} \quad (27)$$

wo also A^s die Amplitude (13) für parallel, antiparallel oder senkrecht zur Bewegungsrichtung des einfallenden π -Mesons polarisierte Deuteronen ist ($s = \pm 1, 0$), B^s gemäß (25) gegeben ist und

$$E_z = \frac{m^2 + M_D^2 - M_z^2}{2 M_D} \quad (28)$$

direkt die Wurzel der Argumente der δ -Funktionen in der oberen Gleichung (27) bezüglich E ist. Auf die Tatsache, daß der Impuls q im nichtbeobachtbaren Bereich gemäß (14) imaginär ist, gehen wir unten noch genauer ein.

Zunächst beachten wir, daß M_z durch die Masse zweier freier reeller Nukleonen des Relativimpulses p_r

$$M_z^2 = 4(M^2 + p_r^2) \quad (29)$$

bestimmt ist, wobei wir also gemäß Abschnitt 1 voraussetzen, daß in (3) H_N und H_K das gleiche kontinuierliche Eigenwertspektrum haben. Dann läßt sich unter Berücksichtigung von (15) der Ausdruck (28) in der Form schreiben

$$E_z = \frac{m^2 - 4 M \varepsilon - 4 p_r^2}{2 M_D}. \quad (30)$$

Nach (27) interessieren im Gebiet $0 < E < m$ nur solche Werte E_z mit

$$-m < E_z < m, \quad (31)$$

und zwar trägt für negative E_z nur die erste δ -Funk-

tion in (23) bei und für positive nur die zweite. Im einzelnen hängt dies vom Wert von p_r^2 ab: für $p_r^2 = 0$ nimmt E_z seinen größten Wert an

$$E_z^{\max} = \frac{m^2 - 4 M \varepsilon}{2 M_D}, \quad 0 < E_z^{\max} < m \quad (32)$$

und wird null für

$$p_r^2 = P'^2 = \frac{m^2 - 4 M \varepsilon}{4}. \quad (33)$$

Im Bereich

$$0 < p_r^2 < P'^2 \quad (34)$$

trägt also nur die zweite δ -Funktion in (27) bei. Für $p_r^2 > P'^2$ wird E_z negativ, hier liefert nur die erste δ -Funktion einen Beitrag, der kontinuierlich den ganzen Bereich $-m < E_z < 0$ umfaßt mit

$$P'^2 < p_r^2 < P^2, \quad (35)$$

wo

$$P^2 = \frac{m^2 - 4 M \varepsilon + 2 m M_D}{4} \quad (36)$$

(entspricht $E_z = -m$). Diese Verhältnisse sind in Abb. 1 veranschaulicht, wo der Pfeil wachsenden p_r^2 entspricht.

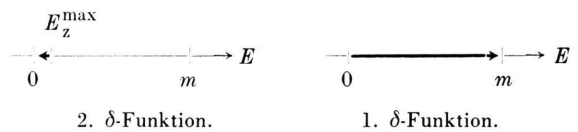


Abb. 1.

Wir gehen nun im einzelnen auf die Tatsache ein, daß im nichtbeobachtbaren Bereich q imaginär ist. Bekanntlich treten dadurch schon bei der Ableitung von Dispersionsbeziehungen für das π -Meson-Nukleon-Problem erhebliche Schwierigkeiten auf. Hier im Falle des π -Meson-Deuteron-Problems entsteht die weitere Komplikation, daß die Matrixelemente in (25) selbst fast im ganzen nichtbeobachtbaren Bereich divergieren. Das hängt damit zusammen, daß für imaginäre q die trigonometrischen Funktionen in den Raumintegralen in hyperbolische übergehen, die so stark divergieren, daß auch die exponentiell abfallende Wellenfunktion des Deuterons ψ_D fast im ganzen nichtbeobachtbaren Bereich keine ausreichende Kompensation bewirken kann [dies ist nur für $\frac{1}{2}|q| = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - E^2} < 1/R$, also für $E > m\sqrt{1 - [(2\hbar/mc)/R]^2} = 0,8m$ möglich, wenn wir den Wert $4,3 \cdot 10^{-13}$ cm für R benutzen [vgl. (44)]. Damit sind wir unmittelbar zur expliziten Durchführung der analytischen Fortsetzung gezwungen, wozu wir die Methode von BOGOLJUBOW¹ verwenden.

Wir ersetzen

$$E = \sqrt{m^2 + q^2} \rightarrow E = \sqrt{\tau + q^2}, \quad q^2 = E^2 - \tau \quad (37)$$

mit τ reell und $\tau < 0$, (38)

und setzen die für diesen Wert aufgestellten Dispersionsbeziehungen im folgenden Abschnitt 4 zum nötigen Wert

$$\tau = m^2 \quad (39)$$

analytisch fort. Es ist klar, daß bei Erfüllung von (38) keinerlei Divergenzen auftreten, da ein „nichtbeobachtbarer“ Bereich im eigentlichen Sinne nicht mehr existiert.

Dann geht gemäß (37) der Ausdruck (30) über in

$$E_z(\tau) = \frac{\tau - 4M\varepsilon - 4p_r^2}{2M_D} < 0, \quad (40)$$

so daß eben unter der Voraussetzung (38) nur die erste δ -Funktion in (27) beiträgt. An das Wertintervall von p_r^2 gemäß (34) und (35) halten wir fest

$$0 < p_r^2 < P^2, \quad (41)$$

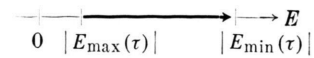
was bedeutet

$$E_{\min}(\tau) = \frac{\tau - m^2 - 2M_D m}{2M_D} < E_z(\tau) < E_{\max}(\tau) \quad (42)$$

$$= \frac{\tau - 4M\varepsilon}{2M_D}.$$

Diese Verhältnisse sind in Abb. 2 veranschaulicht, wo der Pfeil wieder wachsenden Werten von p_r^2

entspricht.



1. δ -Funktion.

Abb. 2.

Im übrigen ist $|E_{\min}(\tau)|$ gerade der E -Wert, von dem ab gemäß (18) [mit $m^2 = \tau$ und (15)] die Terme in der Streuamplitude (13) in Erscheinung treten, die Zwischenzuständen mit mehr Teilchen als zwei Nukleonen entsprechen. Weiter ist bemerkenswert, daß nun in der Tat wegen $\tau < 0$ eine Lücke im E -Spektrum auftritt, die für die strenge BOGOLJUBOWsche Ableitung von Dispersionsbeziehungen notwendig ist (vgl. Anm. ¹).

Wir nehmen nun noch die explizite Berechnung der in (25) steckenden Matrixelemente vor. Eine Berechnung mit den Zwei-Teilchen-Wellenfunktionen $\psi_z'(\mathfrak{x}_r)$ des kontinuierlichen Spektrums von (3) ist mit erheblichen analytischen Schwierigkeiten verbunden. Aber wir können diese Funktionen in unserem Falle exakt durch ebene Wellen ersetzen

$$\psi_z'(\mathfrak{x}_r) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(-i p_r \mathfrak{x}_r). \quad (43)$$

Zunächst ist die ebene Welle, die Eigenfunktion von H_k in (3) ist, nur die asymptotische Form von $\psi_z'(\mathfrak{x}_r)$ für große p_r , aber wichtig für die Auswertung der Streuamplitude (13) ist nur die Tatsache, daß unsere Zwei-Teilchen-Wellenfunktionen im Unterraum von zwei Nukleonen gemäß (12) vollständig sind. Wir hätten schon von vornherein in (12) nach irgendeinem anderen vollständigen System von Funktionen entwickeln können. Speziell für den Unterraum von zwei Nukleonen wählen wir nun zweckmäßigerweise als vollständiges Funktionensystem die ebenen Wellen (43). An den obigen allgemeinen Überlegungen ändert sich nichts: die kontinuierlichen Spektren von H_N und H_k in (3) stimmen sowieso überein und auch ein Deuteron-Grundzustand als Zwischenzustand tritt nicht auf, den wir anderenfalls jetzt streichen müßten¹¹.

Als Wellenfunktion $\psi_D(\mathfrak{x}_r)$ des Deuteron-Grundzustandes wählen wir die von CHEW² benutzte

¹¹ Die Möglichkeit einer Ersetzung (43) ist nur in diesem Zusammenhang neu: vgl. R. L. GLUCKSTERN u. H. A. BETHE, Phys. Rev. **81**, 761 [1951], wo man bei der Berechnung der totalen Wirkungsquerschnitte für die Streuung von Neutronen an Deuteronen wenigstens näherungsweise die Ersetzung (43) vornehmen kann.

HULTHÉN-Funktion (vgl. auch Anm. ¹¹)

$$\psi_D(\mathbf{r}_r) = \left(\frac{\alpha \beta (\alpha + \beta)}{2 \pi (\alpha - \beta)^2} \right)^{1/2} \frac{1}{|\mathbf{r}_r|} \cdot [\exp(-\alpha |\mathbf{r}_r|) - \exp(-\beta |\mathbf{r}_r|)], \quad (44)$$

$$\alpha = \frac{1}{R} = \frac{(m \varepsilon)^{1/2}}{\hbar} = 0,32 m, \quad \beta = 6 \alpha,$$

die recht genau einer YUKAWA-Wechselwirkung entspricht. Damit und mit (43) läßt sich das Absolutquadrat der in Frage stehenden Matrixelemente in (25) leicht analytisch auswerten

$$\left| \int d^3 \mathbf{r}_r \frac{\exp(i \mathbf{p}_r \mathbf{r}_r)}{(2 \pi)^{3/2}} \left(\frac{\sin}{\cos} \right) \frac{q \mathbf{r}_r}{2} \psi_D \right|^2 \quad (45)$$

$$= \frac{\alpha \beta (\alpha + \beta)}{(2 \pi)^2 (\alpha - \beta)^2} \left[\frac{1}{\alpha^2 + g_+^2} - \frac{1}{\beta^2 + g_+^2} \mp \left(\frac{1}{\alpha^2 + g_-^2} - \frac{1}{\beta^2 + g_-^2} \right) \right]^2$$

$$\text{mit} \quad g_{\pm}^2 = p_r^2 + \frac{q^2}{4} \pm |p_r| |q| \cos \vartheta, \quad (46)$$

wobei ϑ der Winkel zwischen p_r und q ist. Wir beachten noch folgendes: es hat keinen Sinn, die analytische Fortsetzung $\tau \rightarrow m^2$ ($|q| \rightarrow i|q|$) schon an dieser Stelle vorzunehmen, weil dann die Nenner $\alpha^2 + g_{\pm}^2$ und $\beta^2 + g_{\pm}^2$ in (45) für bestimmte p_r und q (bei $\cos \vartheta = 0$) wie $(x-a)$ verschwinden und ein Integral über p_r , in dessen Integrand wesentlich der quadratische Ausdruck (45) steht, nicht definiert wäre. Ein solches Integral tritt in den nun aufzustellenden Dispersionsbeziehungen tatsächlich auf.

4. Die Dispersionsbeziehungen

Die ladungsunabhängigen Dispersionsbeziehungen für die elastische Vorwärtsstreuung von π -Mesonen an Deuteronen, die zunächst für $\tau < 0$ aufgestellt werden, schreiben wir gleich in der Form ¹²

$$D^s(E, \tau) - D^s(E_0, \tau) = \frac{2}{\pi} (E^2 - E_0^2) \quad (47)$$

$$\cdot P \left[\int_{|E_{\min}(\tau)|}^{\infty} dE' \frac{E' A^s(E', \tau)}{(E'^2 - E^2)(E'^2 - E_0^2)} + \int_{|E_{\max}(\tau)|}^{|E_{\min}(\tau)|} dE' \frac{E' A^s(E', \tau)}{(E'^2 - E^2)(E'^2 - E_0^2)} \right].$$

Hier ist D^s der hermitesche Teil der Streuamplitude für die entsprechenden Polarisationsrichtungen des Deuterons, A^s der entsprechende antihermitesche Teil [siehe (13)], während wir E_0 im folgenden gleich m setzen. Das letzte Integral enthält nach Abschnitt 3 gerade den Anteil von A^s , der den Zwei-Nukleonen-Zwischenzuständen entspricht und bereits ausgewertet wurde. Das erste Integral betrifft dagegen den Anteil von A^s , der Zwischenzuständen mit mehr Teilchen als zwei Nukleonen entspricht und früher mit f bezeichnet wurde. Nach der analytischen Fortsetzung $\tau \rightarrow m^2$ geht dieses erste Integral über den gesamten beobachtbaren Bereich $E > m$, wo wir A^s nach dem optischen Theorem durch die entsprechenden totalen Wirkungsquerschnitte ausdrücken können. Denn gemäß (42) gilt

$$|E_{\min}(m^2)| = m. \quad (48)$$

Der nichtbeobachtbare Bereich liefert in (47) also einen kontinuierlichen Beitrag, ohne daß Polbeiträge auftreten.

Eine direkte Fortsetzung $\tau \rightarrow m^2$ der Dispersionsbeziehungen (47) [auch schon unter Benutzung von (45) und (46)] ist nun wegen der dann auftretenden Divergenzen nicht möglich, was bereits Ende Abschnitt 3 erwähnt wurde. Wir berechnen darum das Integral (das Hauptwert-Symbol P unterdrücken wir von nun ab)

$$\frac{2}{\pi} q^2 \int_{|E_{\max}(\tau)|}^{|E_{\min}(\tau)|} dE' \frac{E' A^s(E', \tau)}{(E'^2 - E^2) q'^2}, \quad q^2 = E^2 - m^2, \quad (49)$$

$$q'^2 = E'^2 - m^2$$

so weit in völliger Strenge, bis wir auf einen Integralausdruck stoßen, in dem wir dann unmittelbar die analytische Fortsetzung $\tau \rightarrow m^2$ vornehmen können.

Unter Benutzung von (27) und (25) sowie (41) und (42) wird (49)

$$\frac{4 g^2 q^2}{M^2} \int_0^P \left| 1 - \frac{E_z(\tau)}{M_D} \right| \left| \int d^3 \mathbf{r}_r \frac{\exp(i \mathbf{p}_r \mathbf{r}_r)}{(2 \pi)^{3/2}} \left(\frac{\sin}{\cos} \right) \frac{q''(\tau) \mathbf{r}_r}{2} \psi_D \right|^2 \frac{q''^2(\tau)}{q'^2(\tau)} \frac{E_z(\tau)}{E^2 - E_z^2(\tau)} d^3 p_r \quad (50)$$

$$\text{mit} \quad q'^2(\tau) = E_z^2(\tau) - m^2, \quad q''^2(\tau) = E_z^2(\tau) - \tau > 0, \quad (51)$$

wobei P durch (36) und $E_z(\tau)$ durch (40) gegeben ist. Das Absolutquadrat des auftretenden Raumintegrals im Integranden von (50) ist bereits in (45) ausgerechnet worden. Zunächst integrieren wir über die Win-

¹² Vgl. aber die genaueren Überlegungen in Anm. ¹, Abschn. 6.

kel des \mathfrak{p}_r -Raumes, wobei wir berücksichtigen, daß $E_z(\tau)$ nur von \mathfrak{p}_r^2 abhängt. Die Integration von (45) unter Beachtung von (46) über die Winkel des \mathfrak{p}_r -Raumes ergibt dann

$$2\pi \int_{-1}^{+1} d(\cos \vartheta) |\dots|^2 = U \mp V; \quad (52)$$

$$U = \frac{2\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\pi(\alpha-\beta)^2} \left[\frac{1}{f_1^2 - g^2} + \frac{1}{f_2^2 - g^2} - \frac{1}{(f_2 - f_1)g} \left(\ln \left| \frac{f_1 + g}{f_1 - g} \right| - \ln \left| \frac{f_2 + g}{f_2 - g} \right| \right) \right],$$

$$V = \frac{2\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\pi(\alpha-\beta)^2} \frac{1}{2} \frac{(f_2 - f_1)^2}{(f_2^2 - f_1^2)g} \left(\frac{1}{f_1} \ln \left| \frac{f_1 + g}{f_1 - g} \right| - \frac{1}{f_2} \ln \left| \frac{f_2 + g}{f_2 - g} \right| \right)$$

mit $f_1(|\mathfrak{p}_r|) = \alpha^2 + \mathfrak{p}_r^2 + \frac{q''^2}{4}$, $f_2(|\mathfrak{p}_r|) = \beta^2 + \mathfrak{p}_r^2 + \frac{q''^2}{4}$, $g(|\mathfrak{p}_r|) = |\mathfrak{p}_r| |q''|$. (53)

Diese Größen hängen über $|q''|$ gemäß (51) von τ ab.

Wir können nun in der Tat an dieser Stelle die analytische Fortsetzung $\tau \rightarrow m^2$ vornehmen, ohne daß divergente Ausdrücke erscheinen. Für $\tau \rightarrow m^2$ ist zu ersetzen

$$q''^2 = E_z(\tau) - \tau > 0 \rightarrow q''^2 = E_z^2(m^2) - m^2 < 0; \quad q''^2/q'^2 \rightarrow 1. \quad (54)$$

und somit in (53) der Reihe nach unter Verwendung von (40) [bzw. nun auch wieder (30)]

$$f_1(|\mathfrak{p}_r|) = \alpha^2 + \mathfrak{p}_r^2 + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{m^2 - 4M\varepsilon - 4\mathfrak{p}_r^2}{2M_D} \right)^2 - m^2 \right],$$

$$f_2(|\mathfrak{p}_r|) = \beta^2 + \mathfrak{p}_r^2 + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{m^2 - 4M\varepsilon - 4\mathfrak{p}_r^2}{2M_D} \right)^2 - m^2 \right], \quad (55)$$

$$g(|\mathfrak{p}_r|) \rightarrow i g(|\mathfrak{p}_r|) \quad \text{mit} \quad g(|\mathfrak{p}_r|) = |\mathfrak{p}_r| \sqrt{m^2 - \left(\frac{m^2 - 4M\varepsilon - 4\mathfrak{p}_r^2}{2M_D} \right)^2}.$$

In (52) sind also nun die Größen (55) einzusetzen. Wir haben einfach $-g^2$ durch $+g^2$ zu ersetzen und die logarithmischen Glieder können wir für $g \rightarrow ig$ geeignet fortsetzen gemäß

$$\frac{1}{g} \ln \left| \frac{f_j + g}{f_j - g} \right| = \frac{1}{2g} \ln \left(\frac{f_j + g}{f_j - g} \right)^2 \xrightarrow{g \rightarrow ig} \frac{1}{g} \arctg \frac{2f_j g}{f_j^2 - g^2}, \quad (j = 1, 2). \quad (56)$$

Wir schreiben gleich den Ausdruck (50) unter Verwendung von (55) und (56) in der zweckmäßigen Form¹³

$$\frac{g^2}{M^2} q^2 \frac{8\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\pi(\alpha-\beta)^2} \frac{P^{-1}}{m} \int_0^1 dx [U(x) \mp V(x)],$$

$$U(x) = (1 - \kappa) \left(1 - \frac{m}{M_D} \frac{(\kappa - x^2)}{1 - \kappa} \right) \left[\frac{1}{f_1^2 + g^2} + \frac{1}{f_2^2 + g^2} - \frac{1}{(f_2 - f_1)g} \left(\arctg \frac{2f_1 g}{f_1^2 - g^2} - \arctg \frac{2f_2 g}{f_2^2 - g^2} \right) \right] \quad (57)$$

$$\cdot \frac{x^2(\kappa - x^2)}{[E(1 - \kappa)/m]^2 - (\kappa - x^2)^2},$$

$$V(x) = \frac{1}{2} (1 - \kappa) \left(1 - \frac{m}{M_D} \frac{\kappa - x^2}{1 - \kappa} \right) \left[\frac{(f_2 - f_1)^2}{(f_2^2 - f_1^2)g} \left(\frac{1}{f_1} \arctg \frac{2f_1 g}{f_1^2 - g^2} - \frac{1}{f_2} \arctg \frac{2f_2 g}{f_2^2 - g^2} \right) \right] \frac{x^2(\kappa - x^2)}{[E(1 - \kappa)/m]^2 - (\kappa - x^2)^2}$$

mit $f_1(x) = x^2 + \gamma(\kappa - x^2)^2 - \beta_1$, $f_2(x) = x^2 + \gamma(\kappa - x^2)^2 + \beta_2$, $g(\kappa) = \sqrt{4\gamma} \sqrt{(1 - \kappa)^2 - (\kappa - x^2)^2}$. (58)

Die Konstanten sind

$$P = \sqrt{\frac{m^2 - 4M\varepsilon + 2mM_D}{4}} = 2,64 m, \quad \kappa = \frac{m^2 - 4M\varepsilon}{4P^2} = 0,023, \quad (59)$$

$$\gamma = \frac{P^2}{M_D^2} = 0,038, \quad \beta_1 = \frac{1}{P^2} \left(\frac{m^2}{4} - \alpha^2 \right) = 0,021, \quad \beta_2 = \frac{1}{P^2} \left(36\alpha^2 - \frac{m^2}{4} \right) = 0,50.$$

¹³ Man beachte, daß die fortgesetzte Funktion unstetig für stetige f_j und g ist im Gegensatz zur einfacheren Funktion $2/g \cdot \arctg f_j/g$ bzw. $2/g \cdot \arctg g/f_j$.

Wir bemerken, daß der Ausdruck (57) für den Beitrag des nichtbeobachtbaren Bereichs in Verbindung mit (58) und (59) noch streng gilt¹⁴.

Auf Grund der Kleinheit der Konstanten α , γ und β_1 läßt sich relativ leicht eine Näherung angeben, die besser als 10% ist. Wir streichen zunächst die Größe α , soweit sie direkt in U und V in (57) eingeht. Weiter ersetzen wir auch die zweiten Klammern in U und V , die das Verhältnis m/M_D enthalten, durch 1, was im einzelnen einen Fehler von weniger als 5% ausmachen wird. Weiterhin kann man die verbleibenden Integranden in guter Näherung durch einfache analytische Ausdrücke approximieren, mit dem Ergebnis

$$X = \int_0^1 dx U(x) = - \left\{ -\frac{1/\lambda}{\delta^2 - \lambda^2} \arctg \frac{1}{\lambda} - \frac{1/\varrho}{\delta^2 - \varrho^2} \arctg \frac{1}{\varrho} + \frac{2/\sigma}{\delta^2 - \sigma^2} \arctg \frac{\sqrt{\sigma}(1-x_s)}{\sigma + x_s} \right. \\ \left. + \frac{1}{4\sqrt{\delta}} \left[\left(\frac{1}{\delta + \lambda} + \frac{1}{\delta + \varrho} \right) \ln \frac{\sqrt{\delta} + 1}{\sqrt{\delta} - 1} - \frac{2}{\delta + \sigma} \ln \frac{(\sqrt{\delta} + 1)(\sqrt{\delta} - x_s)}{(\sqrt{\delta} - 1)(\sqrt{\delta} + x_s)} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{\delta}} \left[\left(\frac{1}{\delta - \lambda} + \frac{1}{\delta - \varrho} \right) \arctg \frac{1}{\sqrt{\delta}} - \frac{2}{\delta - \sigma} \arctg \frac{\sqrt{\delta}(1-x_s)}{\delta + x_s} + \frac{0,072}{\delta^2} \right] \right\} \quad (60)$$

$$\text{mit }^{15} \quad \lambda = 0,10; \quad \varrho = 1,25; \quad \sigma = 0,55; \quad x_s = 0,43; \quad \delta = E/m \quad (61)$$

und

$$Y = \int_0^1 dx V(x) = \frac{1,41}{\delta^2} (x_s - \frac{1}{2} \arctg 2 x_s) \\ - 0,26 \left\{ \frac{1}{(\delta^2 - \eta^2) \sqrt{\eta}} \arctg \frac{\sqrt{\eta}(1-x_s)}{\eta + x_s} + \frac{1}{4(\delta + \eta)\delta^{3/2}} \ln \frac{(\sqrt{\delta} + 1)(\sqrt{\delta} - x_s)}{(\sqrt{\delta} - 1)(\sqrt{\delta} + x_s)} - \frac{1}{2(\delta - \eta)\delta^{3/2}} \arctg \frac{\sqrt{\delta}(1-x_s)}{\delta + x_s} \right\} \\ + 0,15 \left\{ \frac{-\sqrt{\vartheta}}{\delta^2 - \vartheta^2} \arctg \frac{1}{\sqrt{\vartheta}} + \frac{1}{4(\delta + \vartheta)\sqrt{\delta}} \ln \frac{\sqrt{\delta} + 1}{\sqrt{\delta} - 1} + \frac{1}{2(\delta - \vartheta)\sqrt{\delta}} \arctg \frac{1}{\sqrt{\delta}} \right\} \quad (62)$$

$$\text{mit }^{15} \quad \eta = 0,25; \quad \vartheta = 0,50; \quad x_s = 0,43; \quad \delta = E/m. \quad (63)$$

Folgende grobe Abschätzung kann man durch Vergleich der einzelnen Integranden erhalten: wenn δ so groß ist, daß der Faktor $1/(\delta^2 - x^4)$ im Hinblick auf seine Abhängigkeit von x in den einzelnen Integranden nicht sehr ins Gewicht fällt (er bewirkt allgemein eine Vergrößerung der Integranden zu $x=1$ hin und soll die Größenverhältnisse nicht wesentlich ändern), dann wird der Beitrag $\mp Y$ bei einer groben Abschätzung nicht viel ausmachen. Die Polarisierungseffekte können dann unterdrückt werden. Weiterhin zeigt sich, daß dann in X wesentlich der Anteil für $x < x_s$ beiträgt, der proportional $1/\delta^2$. Insgesamt ergibt sich als grobe Abschätzung (um 30% genau) für nicht zu kleine E (etwa 10 MeV und mehr)

$$X = -c/\delta^2 \quad \text{mit} \quad c \approx 0,25 \quad (64)$$

bei vernachlässigbarem Y [insbesondere in Gl. (65)].

Die Dispersionsbeziehungen, die nun aus (47)

für die elastische Vorwärtsstreuung von π -Mesonen an nicht polarisierten Deuteronen folgen, erhalten wir über (57) durch Mittelung über die drei Polarisationsrichtungen des Deuteronen [$\tau = m^2$, $E_0 = m$ und (48)]

$$D(E) - \bar{D}(m) = \frac{1}{2\pi^2} (E^2 - m^2) \\ \cdot \int_m^\infty dE' \frac{E' \sigma_D(E')}{(E'^2 - E^2)(E'^2 - m^2)} \quad (65) \\ + \frac{f^2}{m^3} (E^2 - m^2) [F(E) - \frac{1}{3} G(E)]; \quad f = \frac{m}{2M} g,$$

wo $F = 0,45 X$ und $G = 0,45 Y$ durch (60) und (62) gegeben sind. $\bar{D}(E)$ ist der Spinmittelwert von $D(E)$ und $\sigma_D(E')$ der totale Wirkungsquerschnitt für die Streuung von π -Mesonen an nicht polarisierten Deuteronen, der unter Verwendung des optischen Theorems eingesetzt wurde.

¹⁴ Aus (58) ist nun auch die am Ende des Abschnitts 3 diskutierte Divergenzschwierigkeit leicht ersichtlich: $f_1(x)$ verschwindet [im Gegensatz zu $f_2(x)$] im Intervall $0 < x < 1$ und für $\cos \vartheta = 0$ also der Nenner $\alpha^2 + g_+^2$ bzw. $\alpha^2 + g_-^2$ in (45), falls fortgesetzt zu $\tau = m^2$.

¹⁵ x_s ist der Sprungpunkt der Funktion $\arctg [2 f_1 g / (f_1^2 - g^2)]$ (wo $f_1 = g$). Ein weiterer Sprung tritt bei $x = 0,05$ auf (wo $|f_1| = g$), der aber unerheblich ist.

5. Schlußbemerkung

Die in Abschnitt 4 durchgeführten Rechnungen ließen den Beitrag des nichtbeobachtbaren Bereichs in den Dispersionsbeziehungen durch einen analytischen Ausdruck angeben, der genauer als 10% ist. Das sollte zunächst für einen Vergleich mit den experimentellen Daten genügen. Falls nötig, kann die Auswertung der Integrale mittels Rechenmaschinen verbessert werden.

Außer dem direkten Vergleich der Dispersionsbeziehungen mit den experimentellen Daten verbleibt noch das (schwierige) Problem einer genau-

ren Begründung unserer Behandlung der allgemeinen Strom-Matrixelemente in Abschnitt 3 (s. auch Abschnitt 2). Gegebenenfalls wird man auch an eine Verbesserung der Wellenfunktion des Deuteron-Grundzustandes zu denken haben, die dem moderneren Standpunkt einer hard-core-Wechselwirkung zwischen Nukleonen Rechnung trägt.

Herrn Prof. BOGOLJUBOW habe ich für wertvolle Anregungen und Diskussionen sehr zu danken, ebenfalls seinen Mitarbeitern, insbesondere Herrn Dr. MEDWEDEW und Herrn Dr. SCHIRKOW. Herrn Dr. LAPIDUS danke ich für eine längere Unterredung.

Ein synchronisierter Autodyndetektor und seine Anwendung auf die Stabilisierung von magnetischen Feldern mit Protonenresonanz

Von W. MÜLLER-WARMUTH und P. SERVOZ-GAVIN *

Aus dem Max-Planck-Institut für Chemie, Mainz
(Z. Naturforsch. **13 a**, 194—203 [1958]; eingegangen am 17. Dezember 1957)

Zum Nachweis von magnetischen Kernresonanzsignalen wird ein Autodyndetektor mit einer eingekoppelten Normalfrequenz benutzt. Die nach der Einstellung des Oszillators unterschiedenen Methoden des „synchronisierten Autodys“ und des „modifizierten Q-Meters“ besitzen eine gute Empfindlichkeit und eine Frequenzstabilität, die praktisch nur von der Synchronisierungsfrequenz abhängt. Von den Ergebnissen der VAN DER POLSchen Theorie ausgehend, werden Ausdrücke für das Verhalten bei Kernresonanzabsorption abgeleitet und diskutiert. Diese tragen der Nichtlinearität des Autodys Rechnung, die sich für das Signal-zu-Rausch-Verhältnis als besonders wichtig erweist und explizit in den Formeln erscheint. Wegen der Einfachheit und der Möglichkeit, die Frequenz über weite Bereiche zu verändern, lassen sich die beschriebenen Methoden gut auf die Stabilisierung von magnetischen Feldern mit Protonenresonanz anwenden. Es wird das Blockschaltbild eines solchen Stabilisators für eine relative Feldstabilität von besser als 10^{-6} angegeben.

Schon bald nach Bekanntwerden der ersten erfolgreichen Experimente von BLOCH¹ und PURCELL² auf dem Gebiete der magnetischen Kernresonanz entstand der Gedanke, die hier gegebene feste Beziehung zwischen Magnetfeld und Resonanzfrequenz für Präzisionsmessungen und zum Konstanthalten des Feldes zu benutzen. Die Präzessionsfrequenz ω_p der Kernspins im Magnetfeld ist ja dem Betrag des Feldes H_0 proportional,

$$\omega_p = \gamma H_0 \quad (1)$$

(γ = gyromagnetisches Verhältnis), und kann in einer geeigneten Apparatur mit einer bekannten Frequenz

verglichen werden. Aus diesem Vergleich läßt sich ein Signal herleiten, das zur Messung oder zur selbsttätigen Regelung gebraucht wird. Seitdem PACCARD das erste praktische Beispiel für einen nach diesem Prinzip arbeitenden Magnetfeldstabilisator gegeben hat³, sind in vielen Gebieten der Physik die Forderungen für die zeitliche Konstanz von Magneten noch erheblich gestiegen. Das mußte naturgemäß zu einer Verbesserung der Methoden führen.

Im wesentlichen bieten sich hierzu drei Ansatzpunkte, nämlich: 1. die Breite der Resonanzlinie und damit verbunden die Empfindlichkeit des Apparates. Man erstrebt die Verwendung geeigneter

* Die vorliegende Arbeit enthält Teile der Dissertation von P. SERVOZ-GAVIN.

¹ F. BLOCH, W. W. HANSEN u. M. E. PACCARD, Phys. Rev. **70**, 474 [1946].

² E. M. PURCELL, H. C. TORREY u. R. V. POUND, Phys. Rev. **69**, 37 [1946]. — N. BLOEMBERGEN, E. M. PURCELL u. R. V. POUND, Phys. Rev. **73**, 679 [1948].

³ M. E. PACCARD, Rev. Sci. Instrum. **19**, 435 [1948].

⁴ W. MÜLLER-WARMUTH, Phys. Verh. **8**, 32 [1957].